Combinatoria

Principios de conteo

1. Principios de la suma y el producto.

Algo muy útil en combinatoria son los principios de la suma y el producto, estos son sencillos de comprender y resultan de gran poder al momento de atacar un problema en el que se requiera conteo. De estos principios se derivan después técnicas de conteo mas sofisticadas.

Principio de la suma: *Si una primera tarea T_1 puede realizarse de m maneras distintas, mientras que una segunda tarea T_2 puede realizarse de n maneras diferentes, y es imposible realizar ambas taréas simultaneamente, entonces el número total de maneras en que se puede realizar alguna de las dos tareas es $n + m$.*

El ejemplo básico es el siguiente.

Ejemplo. Tengo tres libros distintos de combinatoria y cuatro diferentes de geometría. Si quiero llevarme un libro en mi viaje de vacaciones entonces tengo $3 + 4 = 7$ posibles elecciones del libro.

En terminos simples el principio de la suma dice ó $= +$, es decir siempre que al contar se tenga que elegir entre posibilidades entonces se suma.

Principio producto: *Si un proceso puede descomponerse en dos etapas E_1 y E_2, y la primera etapa E_1 puede realizarse de m maneras distintas, mientras que la segunda etapa E_2 puede realizarse de n maneras diferentes, entonces el número total de maneras en que se puede realizar el proceso original es nm.*

El ejemplo básico aquí es el siguiente.

Ejemplo. Mi hermana quiere ir a una fiesta y no decide cual de sus 20 blusas usará ni cuál de sus 25 faldas. La tiene dificil pues en total tiene $(20)(25) = 500$ posibilidades para elegir el atuendo que llevará a la fiesta.

En terminos simples el principio del producto dice $y = \cdot = \times$, es decir siempre que al contar se tengan subprocesos uno tras otro entonces se multiplica.

En la práctica suelen aparecen ambos el principio del producto y de la suma juntos. Para practicar ambos principios dejamos aquí una serie de ejercicios; algunos son aplicación directa (para entender los principios) y algunos otros son poco mas complejos pero se pueden resolver combinando estos principios y teniendo en cuenta el *no contar doble, triple, etc.*

Problema 1. Juan-sin-Miedo tiene 5 primos, 6 primas, 7 tías y 7 tíos.

a) ¿Cuantas posibilidades tiene de invitar a uno de ellos a cenar?

b) ... de invitar a dos de ellos?

Problema 2. En la campaña local se postulan para ser presidentes 10 candidatos de derecha, 15 de izquierda y 4 ciudadanos independientes.

a) Si el presidente debe ser elegido entre estos cadidatos, ¿cuátos posibles resultados hay para presidente?

b) Si lo que se debe elegir es un presidente y un vicesepresidente, ¿cuántos posibles resultados existen?

c) Responda la misma pregunta que en la parte anterior si ahora se impone que ambos candidatos sean de el mismo partido?

d) ... de diferente partido?

Problema 3. Mi primo tiene los libros de olimpiada de álgebra, el de combinatoria, el de geometría, el de teoría de números y acaba de adquirir tabién el de principio de las casillas. Si quiere poner tres de ellos en una repisa de su librero en algun orden, ¿cuántas maneras tiene de hacerlos?

Problema 4. Desde San Luis Potosí hacia Querétaro hay 3 caminos diferentes que se pueden tomar y hay dos hacia Guanajuato. Si se planea ir desde Querétaro hacia Guanajuato reconociendo San Luis Potosí ¿cuántas maneras existen de elejir la ruta?

Problema 5. La empresa AUTO-R produce autos en 4 modelos diferentes, 11 colores, 3 tamaños de motor y en transmición automatica o estandard.

a) ¿cuántos tipos de autos puede AUTO-R ofertar al publico?

b) Uno de los colores es rojo, ¿cuántos tipos de autos rojos puede producir la empresa?

c) Un cliente llega a AUTO-R y pregunta por los tipos de autos que puede adquirir pero que no sean de color rojo, ¿cuántos autos le puede ofertar AUTO-R a este cliente?

Problema 6. ¿Cuántos números de exactamente 5 cifras existen que no contengan al 5?

Problema 7. ¿Cuántas palabras (no necesariamente pronunciables) hay de exactamente 4 caracteres usando el alfabeto $\{m, a, i\}$?

Problema 8. 7 personas van al cine, entre ellos hay un par que son matrimonio. Todos quieren sentarse en la ultima fila que casualmente solo consta de 7 asientos. ¿De cuantas maneras pueden sentarse si el matrimonio debe estar siempre junto?
Si se hubiera dado el caso que el matrimonio tuvo una riña en el camino al cine y andan molestos a tal grado que no quieren sentarse juntos, ¿cuántas maneras tienen entonces de sentarse las 7 personas en la última fila?

Problema 9. 5 niños y 5 niñas de cierta escuela asisten a un evento infantil. Su escuela estará en la primera fila (es decir los 10 asientos de la primera fila son reservados para ellos). Si se les da la indicación de que deben sentarse de modo alternado (esto es no debes haber infantes del mismo género juntos), ¿cuántas maneras tienen de sentarse?
Responda la misma pregunta si ahora en donde se quieren sentar es en un Karussell en el parque, a) sin la restricción de alternar el género. b) con la restrición de alternar el género.

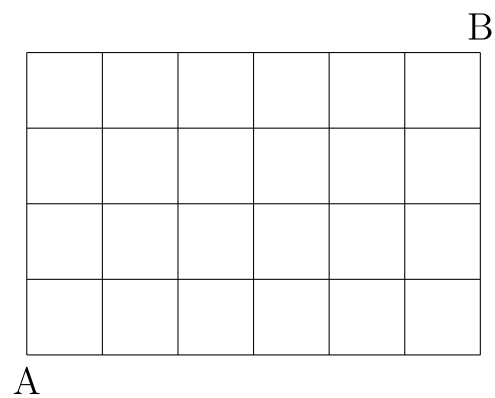
Problema 10. La policía esta investigando sobre un asalto de un cierto banco de alguna ciudad no muy lejana. Hubo dos testigos del asalto que dieron información confiable sobre la placa vehicular en la que huyeron los asaltantes (las placas en esa ciudad constan de 2 letras seguidas de 4 dígitos). El testigo UNO esta seguro que la segunda letra de la placa era alguna de O o Q y que último dígito era alguno de 3 u 8. El testigo DOS dijo que el primer dígito era 7 y que la primera letra era alguna de C o G. ¿Cuántas placas diferentes tiene que verificar la policía?

Problema 11. Determine de cuántas maneras pueden acomodarse los 5 remadores en la balsa de canotaje el dia de la competencia, si a) los dos mas fuertes deben de ir en los extremos, b) si el más debil de los 5 no debe ir en el segundo asiento?, c) ninguno de los dos mas fuertes debe ir en los lugares 3 y 4.

Problema 12. Argumente el porqué la cantidad de subconjuntos (incluyendo al vacío y al total) de un conjunto X con n elementos es 2^n.

Problema 13. Un número entero positivo se dice *capicúa* si se lee igual al derecho que al revés (por ejemplo 19799791). ¿Cuántos números capicúas de a los mas 5 cifras existen?

Problema 14. ¿Cuántos caminos existen para ir de A a B caminando por las lineas marcadas si solo se puede ir hacia arriba o hacia la derecha?



2. El factorial

Habrá notado que en la solución de los problemas aparecen muchas veces productos de la forma

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1).$$

Factorial: *Para enteros* $n \geq 0$ *se define el factorial de* n*, denotado* $n!$*, de modo recursivo mediante* $0! := 1$ *y* $n! := (n-1)!n$.

Ejemplo.
$$3! = 2!3 = 1!2(3) = 1!6 = 0!(1)(6) = 6$$
En general $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$.

Es fácil convencerse que si $0 < r \leq n$ entonces
$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = n!/(n-r)!$$

3. Combinaciones

Otro concepto importante de conteo es el de coeficiente binomial (que definimos a continuación), este es útil a la hora de tomar elecciones de una cantidad de objetos de un conjunto dado.

Coeficiente binomial: *Si se tiene un conjunto de n objetos distintos y se quieren elegir k de entre ellos, entonces el número de maneras en que esto puede hacerse se denota por $\binom{n}{k}$, este número se llama coeficiente binomial.*

Es importante observar que no es importante saber qué son los objetos, solo cuantos son en total y cuántos quieren elegirse.

Ejemplo. Queremos calcular $\binom{4}{2}$. Podemos pensar que los objetos son las letras a, b, c, d. Las posibles parejas que podemos elegir son
$$\begin{aligned}&ab, ac, ad,\\ &bc, db\\ &cd\end{aligned}$$
Observe que la pareja ab y la ba son la misma (importan los objetos elegidos, no el orden de elección)

Problema 15. Encuentre el valor de $\binom{5}{2} - 3\binom{4}{3}$ y el de $\binom{6}{3} - \binom{6}{2}$.

Propiedades elementales. (Argumente!)

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{1} = n$.
- $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para todo $0 \leq k \leq n$, en particular $\binom{n}{n-1} = n$.

Una propiedad fundamental de los coeficientes binomiales es la siguiente

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}.$$

Combinando esta propiedad con las anteriores podemos ver que en el siguiente arreglo (llamado el **triángulo de Pascal**) un elemento se obtiene como suma de los de arriba de el.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \vdots$$

Problema 16. Juanito pintó en la pizarra 8 puntos de los cuales casualmente le quedó que cualesquiera tres de ellos no son colineales. ¿Cuantas rectas diferentes puede trazar Juanito entre los puntos que pintó?

Problema 17. En un estante estante hay 12 libros diferentes. Se quiere hacer una selección de 8 de estos la cual incluya dos libros determinados. ¿De cuántas maneras puede hacerse dicha selección?

Problema 18. Un club de mate con 2 profesores y 6 estudiantes quieren armar un comité de 4 personas que visitaran la Facultad de Matemáticas. ¿De cuántas maneras puede formarse dicho comité si a) pueden ser cualquier persona del club? b) debe haber uno y solo un profesor? c) deben estar el profe de mas experiencia y el niño mas inteligente en dicho comité?

Problema 19. Argumente el porqué debe ser cierta la fórmula (si ya resolvió el problema 12 le será facil)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Problema 20. Argumente de modo combinatorio que

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Problema 21. Para $j \leq k \leq n$ justifique porqué

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.$$

Una fórmula importante para los cálculos es la siguiente

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!)(n-k)!}}$$

Problema 22. ¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono regular? ¿Cuántas un n-ágono regular?

Problema 23. ¿De cuátas maneras puede escogerse un comité de 6 personas de entre un total de 12 si dos personas determinadas no pueden estar juntas en dicho comité?

Problema 24. El problema 14 puede resolverse contando palabras usando coeficientes binomiales. ¿Sabe como? Intentelo!

Problema 25. Demuestre cada una de las siguientes fórmulas usando un *argumento combinatorio*:

a) $2\binom{n}{3} + 2n\binom{n}{2} = \binom{2n}{3}$,

b) $\sum_{i=2}^{n-1}(n-i)(i-1) = \binom{n}{3}$.

4. Reparticiones injustas y separadores

Problema 26. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 20 regalos diferentes entre Ana, Beto y Carina si ya decidieron que Ana reciba 4, Beto 10 y Carina 6?

Problema 27. Si ahora Ana, Beto y Carina quieren repartirse 20 monedas identicas entre ellos y puede ser que a alguien (o dos de ellos incluso) no le toque nada, ¿de cuántas maneras puede hacerse la repartición?